A. PASTOR

La elasticidad de la demanda de dinero para transacciones con respecto al tipo de interés: una aplicación del modelo de Tobin *

I. Introducción

Hasta no hace mucho, el problema básico de la teoría monetaria era la formulación de una demanda de dinero que, partiendo de supuestos de conducta plausibles, se ajustara razonablemente bien a los hechos observados; y, de acuerdo con el esquema «neoclásico» habitual, en el que las relaciones entre magnitudes macroeconómicas han de obtenerse por agregación de funciones microeconómicas referidas al agente individual, el primer paso lógico de la teoría de la demanda de dinero ha sido la construcción de funciones de demanda individuales para el consumidor racional.

Tradicionalmente —es decir, por lo menos desde Keynes— los motivos que impulsarían al consumidor racional a mantener saldos de caja han sido incluidos en alguna de las tres categorías de «transacción», «preocupación» y «especulación». ¿De qué variables depende la demanda de dinero por cada uno de esos tres motivos? Está claro que el tipo de interés actual y esperado ha de jugar un papel en la demanda de dinero por los dos últimos. En cambio, parecería a primera vista que la cantidad de dinero demandada por el motivo «transacción» no tiene por qué depender del tipo de interés, puesto que éste no afecta los desfases temporales entre ingresos (ciertos) y pagos (también ciertos); lo lógico parece ser que la demanda para transacciones dependa del nivel de precios y posiblemente de la renta.

El artículo de Tobin (1) vino a desmentir esta creencia al hacer notar que, si bien el dinero es el único medio de pago generalmente aceptado, no es el único activo líquido; hay otros activos que pueden ser convertidos en dinero prácticamente en cualquier momento —eso sí, incurriendo en un cier-

* La versión original del presente artículo fue presentada en el Seminario de Teoría Monetaria del profesor Franco Modigliani, en el Massachusetts Institute of Technology, en marzo de 1970. Quisiera expresar mi agradecimiento a los doctores Philip Friedman y Michael Lichstein, por sus comentarios.

to coste—. Cabe, pues, pensar que el sujeto racional mantenga el equivalente del volumen de medios de pago que vaya a necesitar en una fecha futura conocida, no en forma de saldos de caja, sino en forma de activos líquidos que vaya convirtiendo en dinero a medida que lo requieran sus necesidades de tesorería. La ventaja de esa estrategia viene medida por el interés devengado por los activos líquidos durante el período de su tenencia; el inconveniente principal es el coste de la conversión de dinero a bonos y de bonos a dinero. El agente se enfrenta, pues, a un problema de optimización, una de cuyas variables es el tipo de interés, que determina la rentabilidad de la inversión en activos líquidos no monetarios (a los que llamaré «bonos» de ahora en adelante). Y Tobin logra demostrar, mediante un modelo muy sencillo, que hay razones para esperar que el volumen y el período de la inversión en bonos dependan directamente del tipo de interés; o, lo que es lo mismo, que la demanda de dinero por el motivo transacción esté inversamente relacionada con el tipo de interés.

II. El modelo de Tobin

Para poner de manifiesto la posibilidad de esa relación, Tobin analiza la conducta de un consumidor que recibe un ingreso Y al principio de un período y lo gasta a velocidad constante (esto es, siguiendo una trayectoria lineal) a lo largo del período; al final del período, $Y = 0$. Aunque el único medio de pago aceptado es el dinero, C, existe un activo líquido alternativo B (bonos) que da interés: el sujeto tiene la opción de mantener la totalidad o una parte de sus ingresos en el momento t en saldos de caja o en bonos; la única limitación es que sus pagos deben ser atendidos en dinero. La conversión de dinero a bonos o de bonos a dinero tiene un coste, $a + bx$. El objetivo del agente es maximizar su ingreso neto a lo largo del período sujeto a la restricción impuesta por el ritmo de sus pagos previstos.[1]

Tobin resuelve el problema en dos etapas: primero se supone fijo (pero arbitrario) el número de conversiones, n, y se determinan los momentos óptimos t_1-t_n de esas conversiones; hecho esto se supone n variable y se determina el número óptimo de conversiones en función del tipo de interés, de la función de pagos y del coste de conversión. Entre las conclusiones más importante de su análisis citaré sólo aquellas que se aplican al caso de costes de conversión fijos ($b = 0$), ya que el modelo que usaré más adelante sólo considera costes fijos.

Estas conclusiones son:

1. No puede ser óptimo proceder a una conversión dinero-bonos como no sea al inicio del período ($t_1 = 0$); si los costes de conversión son demasia-

1. Para una exposición detallada de las hipótesis del modelo, el lector deberá consultar el artículo de Tobin; aquí sólo hay una descripción muy superficial.

do altos con relación al tipo de interés y a la duración del período, lo mejor será no proceder a ninguna conversión, y mantener la totalidad del ingreso en caja; pero *si* es ventajoso proceder a una conversión, entonces el momento óptimo es $t_1 = 0$.

2. Tampoco puede ser óptimo efectuar una conversión bonos-dinero (desinversión) si el saldo de caja en ese momento es positivo (por supuesto, ello tiene que ver con el carácter *continuo* de los pagos).

3. La estrategia óptima consiste en invertir el máximo (que es $\frac{n-1}{n} y$) en $t = 0$, y desinvertir en cantidades iguales y/n a intervalos regulares, dados por

$$t_i = \frac{i-1}{n} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

4. La relación entre el tipo de interés y los saldos medios en bonos es positiva por dos razones: primero, porque para n fijo, el volumen medio de bonos aumenta; segundo, porque «si un aumento del tipo de interés modifica el número óptimo de conversiones, tiende a elevarlo».

¿Qué grado de generalidad tienen estas conclusiones? El objetivo de la presente nota es mostrar que alguna de ellas depende esencialmente de los supuestos que se hagan sobre la trayectoria de ingresos y pagos. Para ello utilizaré un modelo ligeramente distinto del de Tobin —aunque indicado por él mismo en una nota a pie de página— para demostrar que la distribución de las conversiones es uniforme (que los puntos de conversión son equidistantes) si, y sólo si, la trayectoria del ingreso es lineal.

III. Un modelo alternativo

Analizaremos el caso de un individuo que recibe ingreso a una tasa dada a lo largo de un período (que hacemos coincidir, por conveniencia, con el intervalo (0, 1) y ha de tenerlo todo en dinero al final del período. En esta sección supondré que la trayectoria del ingreso es lineal, y se verá que los resultados de Tobin siguien siendo válidos. En el apartado siguiente se demuestra que las conversiones se hallarán igualmente espaciadas entre sí sólo en el caso de que la trayectoria del ingreso sea lineal. Finalmente, supondré que el ingreso sigue una trayectoria exponencial para ver qué diferencias surgen con respecto a los resultados de Tobin.

Suponemos, pues, que el sujeto recibe un ingreso (en dinero) a una tasa constante k, a lo largo del período (0, 1); puede elegir entre mantener su ingreso en dinero durante el período, o invertirlo en bonos, a un tipo de interés constante n, pero con unos costes fijos de conversión, a. Al final del período todo su ingreso ha de estar en forma de dinero.

Como primer paso supondremos fijo el número de conversiones n; el problema se reduce a la determinación de la distribución óptima de esas n conversiones en el tiempo. Daremos por supuesto ya desde ahora que cuando el sujeto efectúa una inversión (conversión dinero-bonos) la cantidad invertida es igual al ingreso total del momento; pues está claro que no tendría sentido esperar a invertir hasta el momento t para entonces no invertir más que una parte de $Y(t)$.

Bajo estos supuestos, la función del ingreso del individuo es

$$\begin{aligned} R_n = & k(t_1 - t_0)(1 - t_1)r + k(t_2 - t_1)(1 - t_2)r + \ldots \\ & \ldots + k(t_n - t_{n-1})(1 - t_n)r - a(n+1) = \\ & = kr \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(1 - t_i) - a(n+1) \end{aligned} \qquad [1]$$

En cada uno de los sumandos de [1], $k\,(t_i - t_{i-1})$ es el ingreso percibido durante el intervalo de tiempo (t_{i-1}, t_i); $(1 - t_i)$ es la fracción de tiempo durante la cual ese ingreso permanecerá invertido en bonos; $(1 - t_i)r_i$ es, pues, el rendimiento de cada unidad monetaria invertida en el momento t_i. El término $a(n+1)$ corresponde al coste de las $n+1$ conversiones.

Las condiciones de primer grado para un máximo son:

$$\frac{\partial R_n}{\partial t_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(1 - t_i)(t_i - t_{i-1}) = 0$$

O bien

$$\begin{aligned} t_{i-1} + t_{i+1} - 2t_i = 0 \qquad & i = 1, \ldots, n \\ & t_0 = 0 \\ & t_{n+1} = 1 \end{aligned} \qquad [2]$$

que dan, explícitamente,

$$\begin{aligned} t_2 &= 2t_1 \\ t_3 &= 3t_1 \\ t_i - t_{i-1} &= t_1, \; t_1 = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

De tal modo que en este caso —como en el analizado por Tobin— las conversiones tienen lugar a intervalos constantes.

Para determinar el número óptimo de conversiones dados r y a tenemos, de [1],

$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= rk(1 - 2nt_1 + 1)(2nt_1 - 1 - nt_1) = \\ &= 2rk(nt_1 - n^2 t_1^2 - 1) \end{aligned} \qquad [3]$$

Si el ingreso de dos conversiones (el número mínimo) es superior al coste, entonces el número de conversiones irá aumentando hasta que el incremento de ingreso debido a una conversión más sea igual al incremento de coste correspondiente. De lo contrario, el número óptimo de conversiones será cero. Es decir, la condición de óptimo es que

$$R_{n+1} - R_n = C_{n+1} - C_n = a$$

que no es sino la versión discontinua de la condición ingreso marginal = coste marginal. Sustituyendo [3] en la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado en *a, r, k* y *t*. Como el coeficiente del término en n^2 es negativo, la condición para que se dé al menos una conversión es que el discriminante sea positivo; esto es, que

$$4\, r^2 k^2 t_1^2 - 8\, a\, r\, k\, t_1^2 > 0$$

de donde

$$t_1 < \frac{rk}{2a}$$

Puesto que el ingreso se percibe en dinero, t_1 corresponde al momento de la primera inversión; la condición anterior indica que t_1 ha de estar lo bastante cerca del origen —esto es, el período de la inversión ha de ser lo bastante largo— como para cubrir los costes de la conversión; de no ser así no se efectuará ninguna conversión. Se advierte que el momento de la primera inversión depende positivamente del tipo de interés y de la velocidad de afluencia del ingreso; ello es obvio, puesto que los costes a cubrir son fijos.

IV. Función de ingreso arbitraria

Podemos generalizar el análisis al caso de una función de ingreso cualquiera. Supongamos que el consumidor percibe un ingreso a una tasa variable $x(t)$ a lo largo del intervalo (0, 1).

Entonces, la función de ingreso acumulado es

$$X(t) = \int_0^t x(t)dt$$

de modo que

$$X(t_i) = \int_0^{t_i} x(t)dt$$

$$X(t_i) - X(t_j) = \int_{t_j}^{t_i} x(t)dt$$

Para n inversiones —es decir, $n + 1$ transacciones— puede escribirse la función de ingreso como

$$R_n = \int_{t_0}^{t_1} x(t)dt \cdot (1 - t_1) \cdot r + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} x(t)dt \cdot (1 - t_n)r - a(n+1)$$

Sustituyendo y haciendo $X(0) = X(t_0)$,

$$R_n = r \sum_{i=1}^{n} [X(t_i) - X(t_{i-1}) \cdot (1 - t_i)] - a(n+1) \qquad [4]$$

Las condiciones de primer grado dan

$$\begin{aligned} X'(t_1)(t_2 - t_1) &= X(t_2) - X(t_0) \\ X'(t_i)(t_i - t_{i-1}) &= X(t_{i+1}) - X(t_{i-1}) \end{aligned} \qquad [5]$$

Ahora es fácil observar que la condición necesaria y suficiente para que las conversiones tengan lugar a intervalos iguales es que la trayectoria del ingreso sea lineal. De [5] se obtiene

$$t_i - t_{i-1} = \frac{X(t_{i-1}) - X(t_{i-2})}{X'(t_{i-1})} \qquad [6]$$

Por consiguiente, $t_i - t_{i-1} = k$ implica

$$X(t_i) - X(t_{i-2}) = \frac{k \cdot X'(t_{i-1})}{2} \qquad [7]$$

lo cual equivale a decir que la trayectoria del ingreso ha de ser una línea recta.

V. Función de ingreso exponencial

Supongamos, por ejemplo, que el ingreso crece (o decrece) a una tasa exponencial k:

$$y(t) = e^{kt}, \quad x(t) = y(t)$$

$$R_{n+1} - R_n = [e^{kt_{n+1}} - e^{kt_n}] \left[1 - t_1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{kt_{i+1}} - e^{kt_{i-1}}}{e^{kt_i}} \right] r - a \qquad [8]$$

Observamos, en [7], que la distancia entre dos inversiones sucesivas aumentará o disminuirá según que la tasa de crecimiento del ingreso sea positiva o negativa. Por consiguiente, si el ingreso *crece* exponencialmente, $t_3 - t_2 > t_2 - t_1$, etc.; y al revés si el ingreso es decreciente.

Por lo que se refiere a la existencia de un número óptimo de transacciones, la expresión [8] da lugar a dos posibilidades distintas:

1. k positiva: ingreso creciente. En este caso, el primer término del segundo miembro de [8] es siempre positivo. El segundo término entre paréntesis es negativo para $n = 1$, el número óptimo de transacciones será cero (todo el ingreso se mantendrá en saldos de caja); si es positivo hasta un cierto valor de n, el óptimo estará determinado.
2. k negativa. En este caso, el primer término entre paréntesis será siempre negativo, y el segundo término positivo y creciente con n. En este caso, existirá en general un óptimo finito.

VI. Resumen y conclusiones

En los apartados anteriores se ha podido ver, primero, cómo la observación de Tobin —que es razonable suponer que la demanda de dinero, incluso aquella que responde al motivo transacciones sea elástica, *ceteris paribus,* con respecto al tipo de interés— queda confirmada para funciones arbitrarias de ingreso; y, segundo, cómo lo que queda afectado por la no linealidad de la función de ingreso es la distribución temporal de las conversiones. La conclusión a la que hemos llegado con respecto a este segundo extremo es intuitivamente plausible: al suponer que el coste de conversión es fijo, ésta será rentable cuando el volumen a invertir produzca un rendimiento suficiente para cubrir ese coste fijo; claramente, el volumen mínimo necesario se alcanzará tanto más rápidamente cuanto mayor sea la velocidad $x(t)$ del ingreso; por ello, cuando $x(t)$ crece, las conversiones tienden a aproximarse unas a otras en el tiempo; lo contrario sucede cuando $x(t)$ decrece. La introducción de un componente variable en el coste de conversión modifica la argumentación introduciendo un momento t_{max} a partir del cual ya no resulta rentable invertir. Pero la conclusión fundamental (la elasticidad positiva de la demanda de bonos con respecto al tipo de interés) no pierde su validez.

Permítaseme decir, como observación final, que no hay que sobreestimar el interés real de esa conclusión: por una parte, no son frecuentes las situaciones en las que puede identificarse una demanda-transacción pura; según esto, en la práctica parecería lo mejor introducir sistemáticamente una variable tipo de interés para explicar la demanda de saldos de caja.

Más importancia tiene, sin embargo, el razonamiento contrario, según el cual parece que la demanda de dinero es, en su totalidad, relativamente inelástica con respecto a los tipos de interés observados; en efecto, el modelo de Tobin da por supuesta la existencia de un mercado monetario líquido y transparente; cuando probablemente una de las características de la mayoría de mercados financieros es su segmentación, provocada por la ley o debida sencillamente al hábito. En la medida en que la alternativa caja-bonos no sea una elección *real* para el agente (por falta de liquidez del mercado de bonos, por prohibición o, sencillamente, por la ignorancia originaria por la especialización) el modelo de Tobin —y otros muchos— son irrelevantes para el trabajo empírico.

Facultad de Ciencias Económicas.
Universidad Autónoma de Madrid.

BIBLIOGRAFÍA

1. TOBIN, J., «The Interest-Elasticity of Transactions Demand for Cash», *Review of Economics and Statistics,* agosto de 1965, pp. 241-247.